ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024
ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 76.
Α2 Σχολ. Βιβλίο σελ. 155.
Α3. Σχολ. Βιβλίο σελ. 216.
Α4. (α) Σ **(β)** Σ **(γ)** Λ **(δ)** Λ **(ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f ορίζεται για $x \in D_f$, όπου $D_f = D_h \bigcap D_g - \{x \in R : h(x) = 0\} = (1,+\infty)$

(αφού $h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$).

Η f έχει τύπο: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in (1,+\infty)$.

Επίσης η r ορίζεται με πεδίο ορισμού $D_r = D_h \bigcap D_g = [1,+\infty)$ και τύπο:

$$r(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1,+\infty).$$

Β2. f παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ άρα και 1–1.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow x - xy = -y-1 \Leftrightarrow$$

$$x(1-y) = -y-1 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

Είναι $x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$,

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = f(x), \quad x \in (1,+\infty)$.

Β3. Αναφορικά με τις ασύμπτωτες της συνάρτησης r έχουμε:

- Η r(x) είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Ενώ για την πλάγια:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=0=\beta$$

άρα $y=x$ πλάγια ασύπτωτη στο $+\infty$

B4. Για κάθε x>1 έχουμε:

$$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)$$

$$x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$x^2=1+4\frac{x^2-1}{x}$$

$$x^2=1+\frac{4x^2-4}{x}$$

$$x^3=x+4x^2-4$$

$$x^3-4x^2-x+4=0$$

$$x^2(x-4)-(x-4)=0$$

$$(x-4)(x^2-1)=0$$

$x=4$ ή $x=1$ ή $x=-1$

δεκτό απορρ. απορρ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f συνεχής στο $D_f=[0,+\infty)$ άρα και στο x_o=2, άρα:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\ (1)$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^\lambda\right)=e^\lambda$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=\lambda+1$$

$$(1):e^\lambda=\lambda+1\Leftrightarrow e^\lambda-\lambda-1=0\ (2)$$

Ισχύει ότι $\ln x\le x-1$ που για $x=e^t$, $t\in R$ γίνεται:

$$\ln e^t\le e^t-1\Leftrightarrow t\le e^t-1\Leftrightarrow e^t-t-1\ge0$$

για κάθε $t \in R$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για t=0. Οπότε η (2) ισχύει μόνο για λ=0.

Γ2. Έχουμε: $f(x)=\begin{cases} -2x+5\ , & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3\ , & x\ge 2 \end{cases}$

- Για $0\le x<2$ είναι $f'(x)=-2<0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$ (f συνεχής)
- Για $x>2$ είναι $f'(x)=-2x+4$, είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

Πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f'.

x	**0**	**2**	**+∞**
f′(x)	-		-
f(x)	↘		↘

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο x_0=0 ολικό μέγιστο, ίσο με $f(0)=5$.

Γ3.

i. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]\subseteq[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=-2$ και στο $(2,+\infty)$ με $f'(x)=-2x+4$, $f(2)=1$. Εξετάζουμε εάν είναι παραγωγίσιμη στο x_o=2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-(x-2)=0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o=2, οπότε δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,3]$.

ii. Είναι $\lambda_{ΔΕ}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$ (συντελεστής διεύθυνσης της ΔΕ).

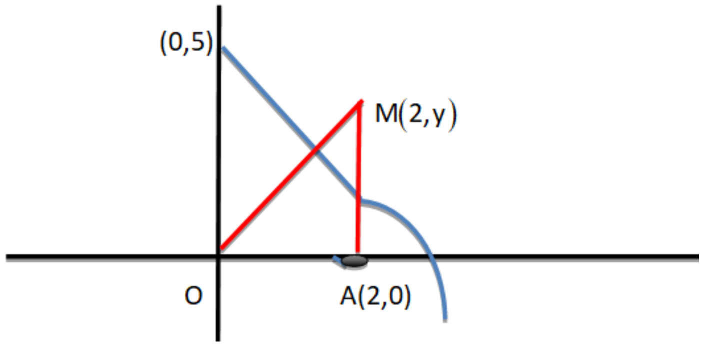
Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$.

$ΔΕ//ε \Leftrightarrow f'(x_0)=-\dfrac{5}{3}$, για $x<2, f'(x)=-2\neq-\dfrac{5}{3}$, για $x>2, f'(x)=-2x+4$.

Πρέπει $f'(x_0)=-\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -2x_0+4=-\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -2x_0=-\dfrac{17}{3} \Leftrightarrow x_0=\dfrac{17}{6}>2$ και $x_0=\dfrac{17}{6}<3$.

Οπότε υπάρχει $\xi \in (2,3) \subseteq (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \lambda_{ΔΕ}$, άρα $\xi = \frac{17}{6}$.

Γ4.



Κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με $u = 0{,}5 μ.μ/sec$, σημαίνει αν $M(x,y)$ και

$x = x(t)$, $y = y(t)$, τότε $y'(t) = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Κινείται κατακόρυφα σημαίνει $x(t) = 2$.

Στο τρίγωνο ΟΑΜ $\left(A = 90^\circ\right)$, έχουμε $εφω(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(t)}{2}$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη:

$$\frac{1}{συν^2ω(t)} \cdot ω'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow ω'(t) = \frac{συν^2ω(t) \cdot y'(t)}{2} \quad (1) .$$

Η $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το Μ συναντά τη C_f.

Άρα $x(t_0) = 2$, $y(t_0) = f(2) = 1$. Έτσι $εφω(t_0) = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} = \frac{1}{2}$ και

$$\frac{1}{συν^2ω(t_0)} = εφ^2ω(t_0) + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{συν^2ω(t_0)} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow συν^2ω(t_0) = \frac{4}{5}.$$

Η (1) για $t = t_0$ γίνεται $ω'(t_0) = \frac{συν^2ω(t_0) \cdot y'(t_0)}{2} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2 rad/sec.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$, έχουμε $f(x)=\dfrac{\ln x+\alpha x}{x}$. Οπότε:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x+\alpha x}{x}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x-(\ln x+\alpha x)}{x^2}=\frac{1+\alpha x-\ln x-\alpha x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.

Οπότε $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$

και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

x	0 e	+∞
f '	+	−
f	↗	↘

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Έστω $A_1=(0,e]$ και $A_2=(e,+\infty)$. Τότε θα είναι:

$$f(A_1)=f((0,e])\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{=}\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right]=\left(-\infty\ ,\ \frac{1+\alpha e}{e}\right]$$ και

$$f(A_2)=f((e,+\infty))\overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu}{=}\left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to e} f(x)\right)=\left(\alpha\ ,\ \frac{1+\alpha e}{e}\right),$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x+\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}+\alpha\right)=-\infty\cdot(+\infty)+\alpha=-\infty$ και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\alpha+\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\alpha+\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\alpha$$

Εφόσον το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=\left(-\infty\ ,\ 1+\dfrac{1}{e}\right]$, τότε θα πρέπει να ισχύει $\dfrac{1+\alpha e}{e}=1+\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}+\alpha=1+\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1$.

Δ2. Για α = 1 , θα είναι $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{x} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$, $x>0$. Άρα:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- Μας δίνει $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=2\ln\frac{1}{2}+1=-2\ln 2+1<0$ και $f(1)=1>0$

Δηλαδή $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0)=0$.

Εφόσον η f στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq(0,e]$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε το x_0 θα είναι μοναδική ρίζα της f.

Δ3. i) πράγματι η x=4 είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης, ενώ για x = 2 θα έχουμε:

$f(2)=\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{2\ln 2+4}{4}=\frac{\ln 2^2+4}{4}=\frac{\ln 4+4}{4}=f(4)$. Άρα και η x=2 είναι ρίζα της εξίσωσης. Έστω ότι υπάρχει και 3η ρίζα x_3 για την f.

Αν $x_1<x_2<x_3 \Leftrightarrow 2<4<x_3$, τότε εφόσον η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[2\ ,\ 4]$ και $[4\ ,\ x_3]$, θα υπάρχουν $\xi_1\in(2,4)$ και $\xi_2\in(4,x_3)$, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$.

Όμως αυτό είναι ΑΤΟΠΟ, διότι η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, η οποία έχει μοναδικό σημείο μηδενισμού το x=e.

Άρα η εξίσωση f(x)=f(4) έχει ακριβώς 2 ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii) Ισοδύναμα η ανίσωση γίνεται :

$$2^x\le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x\le\ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1\le\frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(x)\ge f(2).$$

- Για $x\in(0,e]$, είναι f γνησίως αύξουσα, οπότε:

  $2\le x\le e \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow} f(2)\le f(x)\le f(e) \Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$, οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in[2,e]$.

- Για $x\in(e,4]$, είναι f γνησίως φθίνουσα, οπότε:

  $e<x\le 4 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu}{\Leftrightarrow} f(e)>f(x)\ge f(4) \overset{f(2)=f(4)}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(2)$, οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(e,4]$.

Από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $f(x)\geq f(2) \Leftrightarrow x\in[2,4]$.

Δ4. Ισοδύναμα ο τύπος της g γίνεται:

$$g(x)=f\left(e^x\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}=\left(\frac{\ln e^x}{e^x}+1\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}=\frac{x+e^x}{e^x}\cdot\frac{1-x}{e^x}.$$

Άρα $-\ln 2\leq x\leq 0 \Leftrightarrow e^{-\ln 2}\leq e^x\leq e^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq e^x\leq 1.$

Όμως στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ υπάρχει το x_0 που $x_0=e^x \Leftrightarrow x=\ln x_0$, αφού x_0 μοναδική ρίζα της

εξίσωσης $f(x)=0$.

x	**1/2**	x_0	**1**
f(x)	-		+

Επίσης $\frac{1-x}{e^x}>0$, $x\in[-\ln 2,0]$ οπότε:

$$E=-\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx+\int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx.$$

Έχουμε $\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f\left(e^x\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}dx$ και ομοίως $\int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx=\int_{\ln x_0}^{0} f\left(e^x\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}dx$

Θέτω:

$u=e^x \Leftrightarrow x=\ln u$

$du=e^x dx \Leftrightarrow dx=\frac{1}{e^x}\cdot du \Leftrightarrow dx=\frac{1}{u}\cdot du$

$x=-\ln 2 \rightarrow u=e^{-\ln 2}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$x=\ln x_0 \rightarrow u=x_0$

$x=0 \rightarrow u=1$. Οπότε το εμβαδόν γίνεται:

$$E=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u}\cdot\frac{1}{u}du+\int_{x_0}^{1} f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u}\cdot\frac{1}{u}du=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\cdot f'(u)du+\int_{x_0}^{1} f(u)\cdot f'(u)du=$$

$$-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}=-\frac{f^2(x_0)}{2}+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}\overset{f(x_0)=0}{=}$$

$$\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}=\frac{(1-\ln 4)^2+1^2}{2}=\frac{1-2\ln 4+\ln^2 4+1}{2}=\frac{2-2\ln 4+4\ln^2 2}{2}=$$

$$1-\ln 4+2\ln^2 2=1-2\ln 2+\ln^2 2+\ln^2 2=(1-\ln 2)^2+\ln^2 2.$$